$\Theta(A,\alpha)A)u_0 + \Theta(A,\alpha)f$, где $\Theta(\lambda,\alpha), \alpha \in (0,\alpha_0), \alpha_0 < 1$, — семейство измеримых по Борелю функций (см. [1]). Известно [1], что без наложения дополнительных условий на решение u^* скорость сходимости $u_\alpha \to u^*$ может быть сколь угодно медленной. В [1], [2] показано, что условие истокопредставимости $u^* - u_0 = A^p v, v \in H$, весьма точно описывает множество решений u^* для которых выполняется степенная оценка $\|u_\alpha - u^*\| \le C_0\alpha^p, \quad \forall \alpha \in (0,\alpha_0] \quad (p > 0)$. В настоящей заметке выделен класс решений, на котором имеет место более медленная сходимость:

$$\|u_\alpha - u^*\| \le C_1(-\ln\alpha)^{-p} \quad \forall \alpha \in (0,\alpha_0] \quad (p > 0). \qquad (1)$$

Теорема. 1) *Пусть выполняется условие* $\sup\{(-\ln\lambda)^{-p}|1 - \Theta(\lambda,\alpha)\lambda| : \lambda \in (0,a]\} \le C_2(-\ln\alpha)^{-p}$, $\forall \alpha \in (0,\alpha_0]$ $(p > 0)$, *и имеет место истокообразное представление* $u^* - u_0 \in R((-\ln A)^{-p})$. *Тогда справедлива оценка* (1).

2) *Пусть выполняется оценка* (1). *Тогда для любого* $q \in (0,p)$ *справедливо включение* $u^* - u_0 \in R((-lnA)^{-q})$.

Условие п.1 теоремы выполняется, в частности, для функций $\Theta(\lambda,\alpha) = \lambda^{-1}[1 - (\alpha/(\alpha+\lambda))^N], N \in \{1,2,\ldots\}, \Theta(\lambda,\alpha) = \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda/\alpha})$, порождающих соответственно итерированный метод М.М.Лаврентьева и метод установления. Аналогичный результат получен также для класса итерационных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю. *Итерационные процедуры в некорректных задачах.* -М.: Наука, 1986. -184 с.

2. Кокурин М. Ю. *Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач.* - Йошкар-Ола: МарГУ, 1998.- 292 с.

М. Ю. Кокурин, П. Г. Федяков (Йошкар-Ола)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ГРАВИМЕТРИИ

Рассматривается нелинейное операторное уравнение $F(x) =$

0, где $F: H_1 \to H_2$; H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Предполагается, что F дважды непрерывно дифференцируем по Фреше и $\|F'(x)\| \le N_1$, $\|F''(x)\| \le N_2$ $\forall x \in \Omega_R$, где $\Omega_R = \{x \in H_1 : \|x - x^*\| \le R\}$ и x^* — решение исходного уравнения. Считаем, что вместо точного оператора F известно лишь его приближение $\tilde{F}: H_1 \to H_2$, удовлетворяющее указанным выше неравенствам и условию $\|\tilde{F}(x^*) - F(x^*)\| \le \delta$. Определим оператор P_M как проектор на выбранное конечномерное подпространство M пространства H_1. Исследуется итерационный метод [1] отыскания решения x^*:

$$x_0 \in H_1, \qquad x_{n+1} = P_M(x_0 - \xi - \gamma \tilde{F}'^*(x_n)\tilde{F}(x_n)) + \xi. \qquad (1)$$

Здесь $\xi \in H_1$, $0 < \gamma < \frac{2}{N_1^2}$ — параметры процедуры. Сходимость метода (1) исследуется при условии $\|(P_M(x_0) - E)(x^* - \xi)\| \le \Delta$ в предположении достаточной малости δ и Δ.

Теорема 1. *Существуют такие константы $l > 0$, $C > 0$, $q \in (0,1)$, что если $\|x_0 - x^*\| \le l + C(\delta + \Delta)$ и $M \cap \mathrm{Ker}(F'(x^*)) = \{0\}$, то имеет место оценка $\|x_n - x^*\| \le lq^n + C(\delta + \Delta)$, так что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|x_n - x^*\| \le C(\delta + \Delta)$.*

Метод (1) применялся при решении трехмерной обратной задачи гравиметрии, приводящей к уравнению $A(\rho) = g$. Здесь оператор $A : L_2([0,\pi] \times [0, 2\pi]) \to L_2([a,b] \times [c,d])$ имеет вид

$$A(\rho) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} \frac{(H - r\cos\theta) r^2 \sin\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta}{G(x,y,r,\varphi,\theta,H)},$$

где $G(x,y,r,\varphi,\theta,H) = [(x - r\sin\varphi\cos\theta)^2 + (y - r\sin\varphi\sin\theta)^2 + (H - r\cos\theta)^2]^{3/2}$, $\rho = \rho(\theta,\varphi)$, $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, $H > 0$. В результате тестовых расчетов за 150–250 итераций функционал невязки $\|A(\rho) - g\|^2$ удается уменьшить в 50–60 раз. В качестве M выбиралось подпространство тригонометрических полиномов от θ, φ размерности 10–12.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакушинский А. Б. *Итеративные методы градиентноио типа для нерегулярных операторных уравнений*// ЖВМ и МФ. - 1998. - Т. 38. - No 12. - С. 1962–1966.

М. Ю. Кокурин, Н. А. Юсупова (Йошкар-Ола)

О СХОДИМОСТИ КЛАССА ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ С ПРОЕКТИРОВАНИЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается нелинейное уравнение $F(x) = 0$, где $F : H_1 \to H_2$; H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Считаем, что оператор F дважды дифференцируем по Гато и удовлетворяет условиям

$$\|F'(x)\| \leq N_1, \quad \|F''(x)\| \leq N_2 \quad \forall x \in \Omega_R, \tag{1}$$

где $\Omega_R = \{x \in H_1 : \|x - x^*\| \leq R\}$, x^* — решение уравнения. Пусть вместо точного оператора F доступно его приближение $\tilde{F} : H_1 \to H_2$ такое, что $\|\tilde{F}(x^*)\| \leq \delta$, $\|F'(x^*) - \tilde{F}'(x^*)\| \leq \delta$ и выполняется условие (1).

В работе исследуется группа итерационных методов:

$$x_{n+1} = P_Q[-\Theta(\tilde{F}'^*(x_n)\tilde{F}'(x_n), \alpha_0)\tilde{F}'^*(x_n) \times \\ \times (\tilde{F}(x_n) - \tilde{F}'(x_n)(x_n - \xi))] + \xi, \tag{2}$$

где P_Q — проектор на выпуклое замкнутое множество $Q \subset H_1$; ξ — начальное приближение. Функция $\Theta(\lambda, \alpha_0)$ в (2) аналитична по λ в окрестности отрезка $[0, N_1^2]$ и удовлетворяет следующим условиям: $\sup\limits_{\lambda \in [0, N_1^2]} |\Theta(\lambda, \alpha)\sqrt{\lambda}| \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha}}$ $\forall \alpha \in (0, \overline{\alpha}]$; $\sup\limits_{\lambda \in [0, N_1^2]} |1 - \lambda\Theta(\lambda, \alpha)|\lambda^\nu \leq g(\nu)\alpha^\nu$ $\forall \alpha \in (0, \overline{\alpha}], \nu \in [0, \nu_0] (\nu_0 > 0)$. Предполагается также, что $\sup\limits_{\alpha \in (0, \overline{\alpha}]} \int\limits_{\Gamma_\alpha} \frac{|1 - \lambda\Theta(\lambda, \alpha)|}{|\lambda|} |d\lambda| \leq \infty$, где $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in (0, \overline{\alpha}]} \subset \mathbf{C}$ — семейство положительно ориентированных замкнутых контуров, лежащих в области аналитичности функции $\Theta(\lambda, \alpha_0)$ и охватывающих отрезок $[0, N_1^2]$.